МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

М.В. Донцова

Определенные интегралы

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией института информационных технологий, математики и механики для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия».

Нижний Новгород
2020

УДК 517.31
ББК 22.161.1
Д-67

Д-67 Донцова М.В. ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ: учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2020. – 20 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор кафедры прикладной математики ИРИТ ФГБОУ ВО «НГТУ им. Р.Е. Алексеева» **И.П. Рязанцева**

В учебном пособии приводятся краткие теоретические положения, примеры решения задач, практические задания и пример аудиторной контрольной работы по теме «Определенные интегралы».

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров первого курса института информационных технологий, математики и механики ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия».

УДК 517.31
ББК 22.161.1

Содержание

Введение ……………………….…………………………….………….4
1. Понятие определенного интеграла.……………………………….……….5
2. Геометрический смысл и физические приложения определенного интеграла………………………………………………………………………..6
3. Свойства определенного интеграла.…………………………………………7
4. Формула Ньютона-Лейбница ………………..………………………….8
5. Интегрирование методом замены переменной в определенном интеграле ...12
6. Метод интегрирования по частям ……………………………………...15
7. Практические задания……………………..……………………………17
8. Пример аудиторной контрольной работы……………………..……………18
Литература…………………..…………………………………………………19

Введение

С помощью определенного интеграла решаются разнообразные геометрические и физические задачи, например, вычисление площадей, объемов, работы и другие.

В учебном пособии приводятся краткие теоретические положения, примеры решения задач, практические задания и пример аудиторной контрольной работы по теме «Определенные интегралы». Приведено определение определенного интеграла, изучаются геометрический смысл и физические приложения определенного интеграла, свойства определенного интеграла. Рассмотрено вычисление определенного интеграла с помощью формулы Ньютона-Лейбница, интегрирование методом замены переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям в определенном интеграле.

Учебно-методическое пособие предназначено для бакалавров первого курса института информационных технологий, математики и механики ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 09.03.04 «Программная инженерия» и может быть использовано преподавателями при проведении практических занятий, организации самостоятельной работы студентов.

1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена отрезке [a, b]. Разделим отрезок $[a,\ b]$ на n произвольных частичных отрезков точками x_k такими, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1,n}$ произвольную точку ξ_k, вычислим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и значение функции в точке ξ_k, т.е. $f(\xi_k)$. Составим n-ую интегральную сумму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Обозначим $\lambda = \max \Delta x_k$, $k = \overline{1,n}.$

Определение 1.1. Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется предел интегральных сумм σ_n при стремлении длины максимального отрезка разбиения λ к нулю, если этот предел существует, конечен и не зависит как от выбора разбиения отрезка $[a,b]$, так и от выбора точек ξ_k на отрезках разбиения, т. е.

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

При этом число a является нижним пределом интегрирования, число b — верхним пределом интегрирования, отрезок $[a,b]$— отрезком интегрирования, x — переменной интегрирования, $f(x)$ — подынтегральной функцией.

Функция $f(x)$, для которой на отрезке $[a,b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, называется **интегрируемой на отрезке** $[a,b]$.

Теорема 1.1. (Теорема существования определенного интеграла).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует.

Непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций, в частности, если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на этом отрезке лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на $[a,b]$.

2. Геометрический смысл и физические приложения определенного интеграла

Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с геометрической точки зрения (рис. 1) представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$.

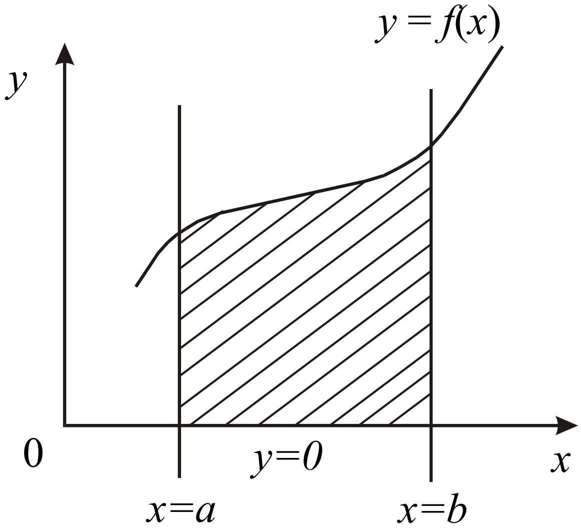

Рис. 1. Площадь криволинейной трапеции

Физические приложения определенного интеграла:

1) путь S, пройденный телом при прямолинейном движении с переменной скоростью $v = v(t)$ от момента времени t_1 до момента времени t_2, определяется формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$$

(переменной интегрирования является время t);

2) работа A переменной силы $F = F(x)$ по перемещению материальной точки из точки $x = a$ в точку $x = b$, если направление силы, а также направление перемещения совпадают с положительным направлением оси OX, определяется формулой

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

(переменной интегрирования является координата материальной точки x).

3. Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

3. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx.$

4. $\int\limits_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int\limits_a^b f(x)dx,$ где c – постоянное число.

5. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx, \quad c \in (a,b).$

6. Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Если $f(x) \leq 0$ на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq 0.$$

7. Если $f(x) \leq g(x)$ на $[a,b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

8. $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|dx, \qquad a < b.$

9. $\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \qquad \left(\int\limits_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x).$

10. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то верны неравенства

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

11. Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что справедливо следующее равенство

$$\int\limits_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Число

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Пример 3.1. Оценить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x}.$$

Решение. Здесь $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \frac{1}{5+3\cos^2 x}$. Так как $0 \le \cos x \le 1$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, то $0 \le \cos^2 x \le 1$, $0 \le 3\cos^2 x \le 3$, $5 \le 5+3\cos^2 x \le 8$. Тогда $\frac{1}{8} \le \frac{1}{5+3\cos^2 x} \le \frac{1}{5}$ при $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Применив свойство 10, имеем

$$\frac{\pi}{16} \le \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+3\cos^2 x} \le \frac{\pi}{10}.$$

Пример 3.2. Оценить определенный интеграл

$$\int_1^2 e^{x^2} dx.$$

Решение. Здесь $1 \le x \le 2$, $f(x) = e^{x^2}$. Так как $1 \le x^2 \le 4$, если $1 \le x \le 2$, то $e \le e^{x^2} \le e^4$ при $x \in [1,2]$. Применив свойство 10, имеем

$$e \le \int_1^2 e^{x^2} \le e^4.$$

4. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 4.1. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула называется формулой **Ньютона-Лейбница** или основной формулой интегрального исчисления. Она дает практически удобный метод вычисления определенных интегралов в том случае, если известна первообразная подынтегральной функции.

Таблица основных неопределенных интегралов

№	Основные неопределенные интегралы
1	$\int 0dx = C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C, \quad x \neq 0,$ $\int \frac{dx}{x+a} = \ln\lvert x+a\rvert + C, \quad x \neq -a$
4	$\int e^x dx = e^x + C,$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \; a \neq 1$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C, \quad x \neq \pi n, n \in Z$
9	$\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$
10	$\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$
11	$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth} x + C \; (x \neq 0)$
12	$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th} x + C$
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C, \quad \lvert x\rvert < 1,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C, \quad \lvert x\rvert < a, \; a \neq 0$
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+1}\right\rvert + C,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C, \quad a \neq 0$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + C, \quad \lvert x\rvert > 1,$ $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C, \quad \lvert x\rvert > \lvert a\rvert, \; a \neq 0$

16	$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg}\, x + C = -\mathrm{arcctg}\, x + C,$$ $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\mathrm{arcctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$$
17	$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad x \neq \pm a,\ a \neq 0,$$ $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad x \neq \pm a,\ a \neq 0$$

Пример 4.1. Вычислить

$$\int_0^1 e^x dx.$$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Пример 4.2. Вычислить

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx.$$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_0^1 e^{2x-1} dx = \frac{e^{2x-1}}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{e^{-1}}{2} = \mathrm{sh}1.$$

Пример 4.3. Вычислить

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx.$$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sin\frac{3\pi}{6}}{3} - \frac{\sin 0}{3} = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}.$$

Пример 4.4. Вычислить

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Пример 4.5. Вычислить

$$\int_0^1 \left(e^x + 2 - 3x^2\right)dx.$$

Решение. Применив свойства 3 и 4 определенных интегралов, формулу Ньютона-Лейбница, имеем

$$\int_0^1 \left(e^x + 2 - 3x^2\right)dx = \int_0^1 e^x dx + 2\int_0^1 dx - 3\int_0^1 x^2 dx =$$

$$= e^x\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 - x^3\Big|_0^1 = e^1 - e^0 + 2 - 0 - 1 + 0 = e.$$

Пример 4.6. Вычислить $\int_{-1}^1 f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \le 0, \\ e^x + \cos x & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 \sin x dx + \int_0^1 \left(e^x + \cos x\right)dx =$$

$$= \int_{-1}^0 \sin x dx + \int_0^1 e^x dx + \int_0^1 \cos x dx = -\cos x\Big|_{-1}^0 + e^x\Big|_0^1 + \sin x\Big|_0^1 =$$

$$= -\cos 0 + \cos(-1) + e^1 - e^0 + \sin 1 - \sin 0 = -1 + \cos 1 + e - 1 + \sin 1 - 0 =$$

$$= -2 + \cos 1 + e + \sin 1.$$

Здесь мы применили свойства 3 и 5 определенных интегралов, формулу Ньютона-Лейбница.

Пример 4.7. Найти среднее значение функции $f(x) = 6x^2 + 2x + 1$ на отрезке $[0,1]$.

Решение.

$$\int_0^1 \left(6x^2 + 2x + 1\right)dx = 6\int_0^1 x^2 dx + 2\int_0^1 x dx + \int_0^1 dx = 2x^3\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = 4.$$

Здесь мы применили свойства 3 и 4 определенных интегралов, формулу Ньютона-Лейбница. Используя свойство 11, имеем

$$f(\xi) = \int_0^1 (6x^2 + 2x + 1)dx = 4.$$

5. Интегрирование методом замены переменной в определенном интеграле

Метод подстановки:

Пусть дан интеграл

$$\int_a^b f(x)dx,$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Введем новую переменную t формулой $x=\varphi(t)$.

Если

1) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha,\beta]$,
2) $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,
3) множеством значений функции $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha,\beta]$ является отрезок $[a,b]$,

то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется формулой замены переменной в определенном интеграле.

При вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется, не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменной.

Пример 5.1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx.$$

Решение. В данном примере $a=0, b=2.$ Сделаем замену переменной $x=2\sin t,$ тогда $dx=2\cos t dt,$ $t=\arcsin\frac{x}{2}.$ Определим новые пределы интегрирования: $\alpha=\arcsin\frac{a}{2}=\arcsin\frac{0}{2}=0,$ $\beta=\arcsin\frac{b}{2}=\arcsin\frac{2}{2}=\frac{\pi}{2}.$

Следовательно,

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2t dt=2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot 0-(\sin\pi-\sin 0)=\pi.$$

Пример 5.2. Вычислить

$$\int_0^5 \frac{3x}{2+\sqrt{x+4}}\,dx.$$

Решение. В данном примере $a=0, b=5$. Положим $t=\sqrt{x+4}$. Тогда

$$x=t^2-4, \quad dx=2t\,dt.$$

Определим новые пределы интегрирования:

$$\alpha=t(a)=t(0)=\sqrt{4}=2, \qquad \beta=t(b)=t(5)=\sqrt{9}=3.$$

Следовательно,

$$\int_0^5 \frac{3x}{\sqrt{x+4}}\,dx=3\int_2^3 \frac{(t^2-4)2t}{2+t}\,dt=6\int_2^3 t(t-2)\,dt=6\int_2^3 \left(t^2-2t\right)dt=6\int_2^3 t^2dt-12\int_2^3 tdt=$$

$$=2t^3\Big|_2^3-6t^2\Big|_2^3=2\left(3^3-2^3\right)-6\left(3^2-2^2\right)=2\cdot 19-6\cdot 5=8.$$

Пример 5.3. Вычислить

$$\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}.$$

Решение. В данном примере $a=1, b=e.$ Применим подстановку $t=\ln x$. Тогда $dt=\dfrac{dx}{x}$. Определим новые пределы интегрирования:

$$\alpha=t(a)=t(1)=\ln 1=0, \qquad \beta=t(b)=t(e)=\ln e=1.$$

Следовательно,

$$\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg} t\Big|_0^1==\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}.$$

Частным случаем замены переменной является приём подведения некоторой функции под знак дифференциала. Применяется, когда в подынтегральном выражении есть произведение $\varphi'(x)dx$ (дифференциал функции).

Пусть требуется найти интеграл

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

По определению дифференциала функции $\varphi'(x)dx=d\varphi(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int_a^b f(\varphi(x))d\varphi(x)=F(\varphi(x))\Big|_a^b=F(\varphi(b))-F(\varphi(a)),$$

где $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Формулы наиболее часто встречающихся дифференциалов:

$dx = \frac{1}{k} d\left(kx+b\right),\ k, b \in \mathbf{R},\ k \neq 0,$	$\frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right),$
$xdx = \frac{1}{2} d\left(x^2\right),$	$x^2 dx = \frac{1}{3} d\left(x^3\right),$
$\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\mathrm{tg}x\right),$	$\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\mathrm{ctg}x\right),$
$\cos x dx = d\left(\sin x\right),$	$\sin x dx = -d\left(\cos x\right),$
$\frac{dx}{x^2+1} = d\left(\mathrm{arctg}x\right),$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right),$
$e^x dx = d(e^x),$	$e^{-x} dx = -d(e^{-x}),$
$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}),$	$\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right).$

Пример 5.4.

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{d(2x+1)}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1|\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}.$$

Пример 5.5.

$$3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x d(\cos x) = -\cos^3 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos^3\frac{\pi}{2} + \cos^3 0 = 1.$$

Пример 5.6.

$$\int_1^3 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_1^3 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^3 = \frac{1}{2}\left(\ln 10 - \ln 2\right) = \frac{1}{2}\ln 5 = \ln\sqrt{5}.$$

Пример 5.7.

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \int_1^e \sin(\ln x)\, d(\ln x) = -\cos(\ln x)\Big|_1^e = -(\cos(\ln e) - \cos(\ln 1)) =$$

$$= -\cos 1 + \cos 0 = -\cos 1 + 1.$$

6. Метод интегрирования по частям

Теорема 6.1. Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Пример 6.1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Решение.

$$\int_0^1 xe^x dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^x dx, & v = \int e^x dx = e^x \end{matrix} \right\| = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 =$$

$$= e^1 - 0 \cdot e^0 - e^1 + e^0 = e^0 = 1.$$

Пример 6.2. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx.$$

Решение. Пусть $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$, откуда $du = 2xdx$, $v = -e^{-x}$. Тогда

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = \left\| \begin{matrix} u = x^2, & du = 2xdx, \\ dv = e^{-x} dx, & v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\| = -x^2 e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x} dx = -\frac{1}{e} + 2\int_0^1 xe^{-x} dx =$$

$$= \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, & v = \int e^{-x} dx = -e^{-x} \end{matrix} \right\| = -\frac{1}{e} + 2\left(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \right) == -\frac{1}{e} - \frac{2}{e} - 2e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{3}{e} - \frac{2}{e} + 2 = \frac{2e-5}{e}.$$

Пример 6.3. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx.$$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\, dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos x dx, & v = \int \cos x dx = \sin x \end{matrix} \right\| = x \cdot \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 + \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Пример 6.4. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx.$$

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \sin x\,dx, & v = \int \sin x\,dx = -\cos x \end{matrix} \right\| = -x\cdot\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} -$$

$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos x)\,dx = -\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cos\frac{\pi}{2} - 0\cdot\cos 0\right) + \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Пример 6.5. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^e \ln x\,dx.$$

Решение.

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left\| \begin{matrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x}, \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{matrix} \right\| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e dx = e\ln e - \ln 1 - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.$$

Пример 6.6. Вычислить определенный интеграл

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx.$$

Решение.

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x, \ du = \dfrac{1}{x}dx, \\ dv = x^2 dx, v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3x}dx = \left(\frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}.$$

7. Практические задания

Задание 1. Вычислить определенные интегралы

1. $\int\limits_{2}^{4} x\sqrt{x}dx$	2. $\int\limits_{5}^{7} xe^{x^2}dx$	3. $\int\limits_{0}^{1} \ln(2x+3)\,dx$	4. $\int\limits_{-1}^{7} \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$
5. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$	6. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x dx$	7. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$	8. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{3+\cos x}$
9. $\int\limits_{1}^{2} \frac{4x+2}{2x-1}dx$	10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{3x^5-12x^3-7}{x^2+2x}dx$	11. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{6}dx$	12. $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x dx$
13. $\int\limits_{-2}^{0} (1+x)^7 x dx$	14. $\int\limits_{0}^{1} \left(2^x+\frac{1}{1+x^2}\right)dx$	15. $\int\limits_{1}^{3} \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$	16. $\int\limits_{-1}^{4} (1-x^2)x dx$
17. $\int\limits_{0}^{2} \lvert 1-x\rvert dx$	18. $\int\limits_{0}^{1} (x^2+3x+4)e^x dx$	19. $\int\limits_{0}^{1} x(2-x^2)^{12}dx$	20. $\int\limits_{0}^{\ln 2} xe^{2x}dx$
21. $\int\limits_{0}^{2\pi} x^2\cos x\,dx$	22. $\int\limits_{0}^{1} (x+1)2^x dx$	23. $\int\limits_{0}^{1} \ln(3x+4)\,dx$	24. $\int\limits_{-0,5}^{0,5} \arcsin x dx$
25. $\int\limits_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$	26. $\int\limits_{0}^{1} \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$	27. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$	28. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$
29. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$	30. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sin 2x\sin 3x dx$	31. $\int\limits_{1}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sin x^2 dx$	32. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$
33. $\int\limits_{0}^{4} (1+e^{\frac{x}{4}})dx$	34. $\int\limits_{1}^{e} (x+1)\ln x\,dx$	35. $\int\limits_{0}^{1} \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$	36. $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
37. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$	38. $\int\limits_{3}^{6} \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$	39. $\int\limits_{1}^{4} \frac{x}{\sqrt{4+2x}}dx$	40. $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\mathrm{ctg}\,x}dx}{\sin^2 x}$
41. $\int\limits_{2}^{3} x(3-x)^7 dx$	42. $\int\limits_{3}^{4} \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$	43. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$	44. $\int\limits_{3}^{4} \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$

Задание 2. Вычислить

$$\int\limits_{0}^{2} f(x)dx, \text{ если}$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0\le x\le 1, \\ 2-x & \text{при } 1< x\le 2. \end{cases}$$

Задание 3. Оценить определенный интеграл

1. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{7+2\sin^2 x}$, 2. $\int\limits_{2}^{3} 2^{x^2}dx$, 3. $\int\limits_{1}^{5} \ln(4x+1)dx$.

8. Пример аудиторной контрольной работы

Вариант 1

Задание. Вычислить

1. $\int_0^1 \ln(2x+3)\,dx$	2. $\int_5^7 xe^{x^2}dx$	3. $\int_0^4 (1+e^{\frac{x}{4}})dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$	5. $\int_3^4 \frac{2x^3-1}{x^2+x-6}dx$	6. $\int_{-1}^4 (1+2x)(x+2)dx$

Вариант 2

Задание. Вычислить

1. $\int_0^1 (x+1)2^x dx$	2. $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sin x^2 dx$	3. $\int_{-1}^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$
4. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	5. $\int_2^3 \frac{x^3+1}{x^2-x}dx$	6. $\int_0^3 (x-2)(4x+3)dx$

Вариант 3

Задание. Вычислить

1. $\int_0^1 \ln(3x+4)\,dx$	2. $\int_0^1 x\left(2-x^2\right)^{12}dx$	3. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{6}dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{3+\cos x}$	5. $\int_3^4 \frac{2x^3+5}{x^2-x-2}dx$	6. $\int_1^4 (x+2)(2x-3)dx$

Вариант 4

Задание. Вычислить

1. $\int_0^{\ln 2} xe^{2x}dx$	2. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}dx}{\sin^2 x}$	3. $\int_0^1 (1+2x)^5 dx$
4. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$	5. $\int_3^6 \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$	6. $\int_0^6 (x+4)(3x+5)dx$

Литература

1. Белов В.Н., Косова А.В., Чуев В.Ю. Определенный интеграл: методические указания к выполнению типового расчета. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009. – 48 с.
2. Демидович В.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: АСТ: Астрель, 2006. – 558 с.
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. Интегралы, ряды. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 504 с.
4. Рязанцева И.П., Мошкова А.Н., Кулагина Л.В., Бубнова О.Ю. Неопределенный интеграл: учебное пособие. – Нижний Новгород: НГТУ им. Р. Е. Алексеева, 2017. – 113 с.
5. Хорошилова Е.В. Математический анализ: неопределённый интеграл (в помощь практическим занятиям): Учеб. пособие для студентов университетов. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, МАКС Пресс, 2007. – 184с.

Марина Владимировна **Донцова**

Определенные интегралы

Учебно-методическое пособие

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23.